УДК 517.4

М. В. Кретов

О ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются некоторые свойства почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве.

Some properties of almost periodic functions with values in banach space are considered.

Ключевые слова: почти периодическая функция, банахово пространство, компактность, конечная ε-сеть, последовательность, равномерная непрерывность, подпоследовательность, счетное всюду плотное множество.

Key words: almost periodic function, Banach space, compactness, finite ε-net, sequence, uniform continuity, subsequence, countable dense set.

По аналогии со скалярной теорией почти периодических функций, изложенной в монографии Б. М. Левитана [1], введем понятие почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве и рассмотрим некоторые их свойства.

Определение 1. *Непрерывная на всей действительной оси функция f со значениями в банаховом пространстве E [2] называется почти периодической, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $l = l(\varepsilon) > 0$, что в любом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство $\|f(x+\tau) - f(x)\| < \varepsilon$, где x — любая точка действительной оси.*

Теорема 1. *Множество значений почти периодической функции f со значениями в банаховом пространстве E компактно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно построить для множества значений почти периодической функции f конечную ε-сеть для любого $\varepsilon > 0$. Сначала докажем, что множество значений непрерывной функции f со значениями в банаховом пространстве на отрезке $[0, l]$ компактно. Так как множество точек отрезка действительной оси компактно, то из любой бесконечной последовательности точек отрезка $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ можно выделить последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, сходящуюся к некоторой точке отрезка t_0. В силу непрерывности функции f из любой бесконечной последовательности значений $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ можно выделить последовательность $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n), \ldots$, сходящуюся к некоторому элементу $f(t_0)$ пространства E. Это означает, что множество значений функции f со значениями в банаховом пространстве на конечном отрезке $[0, l]$ компактно, поэтому для множества значений функции f можно для любого $\varepsilon > 0$ построить конечную $\varepsilon/2$-сеть, то есть существует такое конечное множество $a_1, a_2, \ldots, a_k$ элементов из пространства E таких, что для любого числа x из отрезка $[0, l]$ найдется такой элемент a_{i_0}, что выполняется неравенство $\|f(x) - a_{i_0}\| < \varepsilon/2$.

Теперь докажем, что множество $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ε-сеть для множества значений почти периодической функции f со значениями в пространстве E, когда переменная x меняется на всей действительной оси. Для этого согласно определению 1 выберем число τ из $(-x_0, -x_0 + l)$, для которого будет выполняться неравенство: $\|f(x_0+\tau) - f(x_0)\| < \varepsilon/2$, где x_0 — любая точка действительной оси. Число $x_0 + \tau$ принадлежит $[0, l]$, значит, имеет место $\|f(x_0) - a_{i_0}\| \le \|f(x_0) - f(x_0+\tau)\| + \|f(x_0+\tau) - a_{i_0}\| < \varepsilon$, где a_{i_0} — некоторый элемент из ε-сети, который удовлетворяет неравенству $\|f(x_0+\tau) - a_{i_0}\| < \varepsilon/2$. Теорема доказана.

Следствие. *Почти периодическая функция f со значениями в банаховом пространстве E ограничена.*

Теорема 2. *Почти периодическая функция f со значениями в банаховом пространстве равномерно непрерывна на всей действительной оси.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В отрезке $[-1, 1 + l]$ функция f равномерно непрерывна, то есть для любого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое число $0 < \delta < 1$, что для любых y_1 и y_2 из $[-1, 1 + l]$, удовлетворяющих неравенству $|y_2 - y_1| < \delta$, выполняется неравенство $\|f(y_2) - f(y_1)\| < \varepsilon/3$.

Пусть теперь x_1 и x_2 — любая пара действительных чисел, для которой выполняется неравенство $|x_2 - x_1| < \delta$. Обозначим через $\tau - \varepsilon/3$ почти период функции f, который лежит в (–

$x_1, -x_1 + l$). Так как выполняются $|x_2 - x_1| < \delta$ и $0 < x_1 + \tau < l$, то числа $x_2 + \tau$ принадлежат интервалу $(-1, 1 + l)$, поэтому

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leqslant \|f(x_2) - f(x_2 + \tau)\| + \|f(x_2 + \tau) - f(x_1 + \tau)\| + \|f(x_1 + \tau) - f(x_1)\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Непрерывная функция f со значениями в банаховом пространстве E называется почти периодической, если из любой бесконечной последовательности $f(x + h_1)$, $f(x + h_2)$, …, $f(x + h_n)$, … можно выбрать равномерно сходящуюся на всей действительной оси подпоследовательность.*

Теорема 3. Определение 1 эквивалентно определению 2.

Доказательство. Пусть функция f со значениями в пространстве E является почти периодической функцией согласно определению 1. Докажем, что она почти периодична по определению 2. Из теоремы 1 следует, что множество значений функции f компактно, значит, из любой бесконечной последовательности $f(x + h_1)$, $f(x + h_2)$, …, $f(x + h_n)$, … можно выделить сходящуюся подпоследовательность $f(x + h'_1)$, $f(x + h'_2)$, …, $f(x + h'_n)$, … при каждом действительном x.

Покажем, что из последовательности $f(x + h_1)$, $f(x + h_2)$, …, $f(x + h_n)$, … можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Применим диагональный процесс. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ счетное всюду плотное множество действительных чисел. По теореме 1, из последовательности $f(x_1 + h_1)$, $f(x_1 + h_2)$, …, $f(x_1 + h_n)$, … можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $f(x_1 + h_{11})$, $f(x_1 + h_{12})$, …, $f(x_1 + h_{1n})$, … . Аналогично из последовательности $f(x_2 + h_{11})$, $f(x_2 + h_{12})$, …, $f(x_2 + h_{1n})$, … можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $f(x_2 + h_{21})$, $f(x_2 + h_{22})$, …, $f(x_2 + h_{2n})$, … и так далее. Рассмотрим теперь диагональную последовательность

$$f(x_1 + h_{11}), f(x_2 + h_{22}), \ldots, f(x_n + h_{nn}), \ldots \qquad (1)$$

Покажем, что последовательность (1) сходится во всех точках счетного всюду плотного множества. Если x_k — произвольная точка из такого множества, то, согласно нашей конструкции, последовательность

$$f(x_k + h_{k1}), f(x_k + h_{k2}), \ldots, f(x_k + h_{kn}), \ldots \qquad (2)$$

сходится, причем при $n > k$ и $x = x_k$ все члены последовательности (1) входят также в последовательность (2), поэтому последовательность (1) сходится в любой точке x_k.

Покажем теперь, что последовательность (1) сходится равномерно на всей действительной оси. Пусть x_0 – произвольное действительное число и ε — произвольное (сколь угодно малое) положительное число. Выберем число $l = l(\varepsilon/5)$ согласно определению 1 и число $\delta = \delta(\varepsilon/5)$ согласно теореме 2. Интервал $[0, l]$ покроем p интервалами длины δ и в каждом из них выберем точку из счетного всюду плотного множества. Обозначим выбранные точки через $y_1, y_2, \ldots, y_p$. При фиксированном ε, p — также фиксировано, поэтому из сходимости последовательности (1) в точках $y_1, y_2, \ldots, y_p$ следует, что можно указать большое целое число N, что для любых чисел $r, s > N$ будут выполняться неравенства:

$$\|f(y_i + h_{rr}) - f(y_i + h_{ss})\| < \varepsilon/5 \quad (i = 1, 2, \ldots, p). \qquad (3)$$

Пусть $\tau - \varepsilon/5$ — почти период функции f, заключенный в интервале $(-x_0, -x_0 + l)$. Тогда число $y_0 = x_0 + \tau$ лежит в интервале $(0, l)$, при некотором i имеет место неравенство $|y_i - y_0| < \delta$, и по теореме 2

$$\|f(y_i + h_{kk}) - f(y_0 + h_{kk})\| < \varepsilon/5 \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (4)$$

Из неравенств (3) и (4) получаем: $\|f(x_0 + h_{rr}) - f(x_0 + h_{ss})\| < \varepsilon$.

Так как число N не зависит от x_0, а ε и x_0 были выбраны произвольно, то последовательность (1) сходится равномерно для всех действительных чисел.

Обратно. Пусть теперь функция f является почти периодической функцией согласно определению 2. Докажем, что эта функция будет почти периодической функцией по определению 1. Предположим противное, то есть что для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ нельзя указать соответствующую длину $l(\varepsilon_0)$. Это означает, что существует последовательность интервалов $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, длины которых $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ неограниченно растут, так что ни в одном из интервалов L_n нет ε_0 — почти периодов функции f. Пусть h_1 — произвольное действительное число и число h_2 такое, что разность $h_2 - h_1$ лежит в интервале $L_{\nu_1} = L_1$. Выбираем L_{j2} так, что $r_{j2} > |h_2 - h_1|$ и число h_3 так, чтобы разности $h_3 - h_1$ и $h_3 - h_2$ лежали в L_{ν_2}. Далее выбираем интервал L_{ν_3} из условия

$r_{j3} > \max\ (|h_2 - h_1|,\ |h_3 - h_2|,\ |h_3 - h_1|)$ и число h_4 таким, чтобы числа $h_4 - h_1$, $h_4 - h_2$, $h_4 - h_3$ лежали в L_{ν_3}. Вообще интервал L_{ν_n} выбираем так, что $r_n > \max\limits_{\mu<\nu,\, \mu,\nu\in[1,n]} |h_\mu - h_\nu|$ и h_{n+1} так, чтобы разности $h_{n+1} - h_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ лежали в L_{ν_n}. Покажем, что из последовательности $f(x + h_1)$, $f(x + h_2)$, …, $f(x + h_n)$, … нельзя выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Действительно,

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} \left\| f(x+h_{n_1}) - f(x+h_{n_2}) \right\| = \sup_{-\infty<x<+\infty} \left\| f(x+h_{n_1} - h_{n_2}) - f(x) \right\| > \varepsilon_0,$$

так как по построению все разности $h_{n_1} - h_{n_2}$ $(n_1 < n_2)$ принадлежат $L_{\nu_{n_1}-1}$ и ни одно из чисел этого интервала не является ε_0 — почти периодом функции f. Получили противоречие. Теорема доказана.

Почти периодические функции со значениями в банаховом пространстве обладают следующими простыми свойствами:

1. Если функция $f(x)$ — почти периодическая функция, то функции $\alpha f(x)$ и $f(x + c)$, где c — действительное число, α — комплексное число, также почти периодические функции.

2. Сумма почти периодических функций есть также почти периодическая функция.

3. Предел $f(x)$ равномерно сходящейся последовательности почти периодических функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, … является почти периодической функцией.

Список литературы

1. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М., 1953.
2. *Люстерник Л. А.*, *Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1968.

Об авторе

М. В. Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта, e-mail: kretov20062006@yandex.ru

Author

Dr M. V. Kretov — assistant professor, IKSUR, e-mail: kretov20062006 @yandex.ru